

PENERAPAN METODE PEMETAAN SCHWARZ-CHRISTOFFEL DALAM PENENTUAN INDUKTANSI BOCOR ALUR MESIN TAK SEREMPAK

R.N. Hazaña
Chairuzzaini

Abstrak: Tulisan ini membahas penerapan metode pemetaan *Schwarz-Christoffel* (SC) dalam penentuan induktansi bocor alur (*slot*) mesin tak serempak. Penentuan tersebut dilakukan melalui penghitungan energi magnetik yang terdapat dalam alur. Secara umum dibahas penentuan distribusi medan magnet untuk dua macam contoh bentuk alur (*segiempat* dan *segienam*) yang dapat diperluas ke sembarang bentuk alur poligonal yang diinginkan. Penentuan induktansi bocor alur menggunakan metode pemetaan SC dibandingkan dengan penggunaan metode konvensional maupun penggunaan perangkat lunak berbasis metode elemen terbatas (*finite-element method*). Perbandingan tersebut menunjukkan bahwa penggunaan metode pemetaan SC mampu mengatasi keterbatasan-keterbatasan yang ditemui dalam penerapan kedua metode pemetaan tersebut, yaitu masih diperlukannya faktor-faktor koreksi empirik maupun diabaikannya celah udara di dekat bukaan alur (*slot-opening*) pada penggunaan metode konvensional serta lamanya waktu perhitungan dan keterbatasan kemampuan memori hitung komputer yang sering ditemui pada penghitungan berbasis metode elemen terbatas.

Kata kunci: Fungsi kompleks, Pemetaan konform, Induktansi bocor alur, Energi magnetik

Pada perancangan motor tak serempak, induktansi bocor alur sangat penting untuk diketahui. Induktansi tersebut dibutuhkan untuk menentukan rangkaian pengganti motor, yang selanjutnya berguna untuk memperkirakan karakteristik kerja motor tersebut.

Induktansi bocor alur stator dan rotor pada umumnya dihitung dengan menggunakan metode konvensional (Jufer, 1995). Metode tersebut tidak memadai jika alur mempunyai bentuk yang kompleks, karena anggapan bahwa distribusi medan magnet dalam alur berdimensi satu tidak cukup mewakili keadaan yang sebenarnya. Untuk mengatasi hal ini, seringkali faktor-faktor koreksi yang diperoleh secara empirik harus digunakan. Kelemahan lain dari metode ini adalah diabaikannya celah udara di dekat bukaan alur (*slot-opening*). Metode elemen terbatas memungkinkan diatasinya kesulitan-kesulitan seperti kompleksitas bentuk alur serta kejenuhan bahan magnetik, namun penggunaan metode ini seringkali terbentur pada lamanya waktu penghitungan serta keterbatasan kemampuan memori hitung komputer yang dipakai (Foglia, 1997).

Karena keterbatasan-keterbatasan dari kedua metode tersebut (metode konvensional dan metode elemen terbatas), metode *conformal mapping* (Marković, 2004) atau pemetaan konform layak diteliti sebagai metode alternatif. Pemetaan konform sangat bermanfaat dalam analisis persoalan-persoalan medan magnet yang dapat didekati dalam dua dimensi. Dengan menggunakan transformasi fungsi kompleks, konfigurasi-konfigurasi alur yang rumit diubah menjadi konfigurasi-konfigurasi baru yang lebih sederhana. Konfigurasi sederhana tersebut, persoalan-persoalan medan magnet dapat dipecahkan secara analitik. Meski masalah kejenuhan bahan magnetik masih tetap belum dapat diatasi, metode pemetaan konform menjadi pilihan tengah yang tepat jika dihadapkan pada pilihan antara metode konvensional atau metode numerik berbasis elemen terbatas.

Tulisan ini memaparkan suatu metode umum untuk menghitung induktansi bocor alur berbasis pemetaan konform. Beberapa contoh penerapan metode penghitungan ini juga diberikan. Hasil penghitungan berdasarkan metode yang diuraikan akan dibandingkan dengan hasil penggunaan

metode konvensional maupun perangkat lunak berbasis metode elemen terbatas.

Pemetaan Schwarz-Christoffel

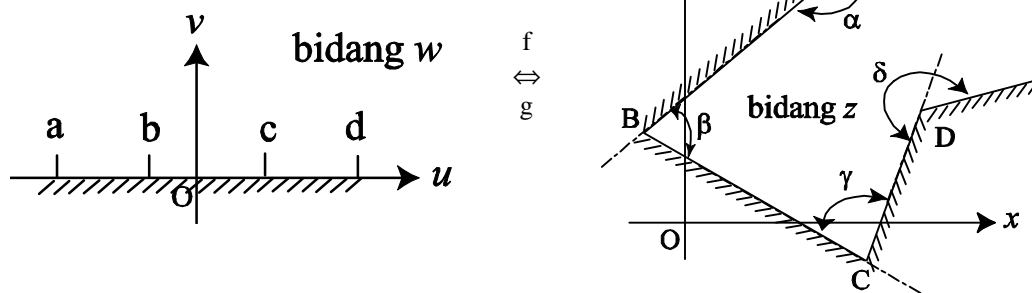
Schwarz-Christoffel mapping atau pemetaan Schwarz-Christoffel(SC) adalah suatu pemetaan konform yang memetakan sumbu nyata suatu bidang kompleks w ($w=u+jv$ pada Gambar 1) ke sisi-sisi poligon pada suatu bidang kompleks z lainnya ($z=x+jy$), sedemikian hingga titik-titik dengan nilai v positif pada bidang w akan dipetakan ke titik-titik di dalam poligon pada bidang z .

Pemetaan $z=f(w)$ tersebut dinyatakan dengan menggunakan persamaan diferensial *Schwarz-Christoffel* (Binns, 1994):

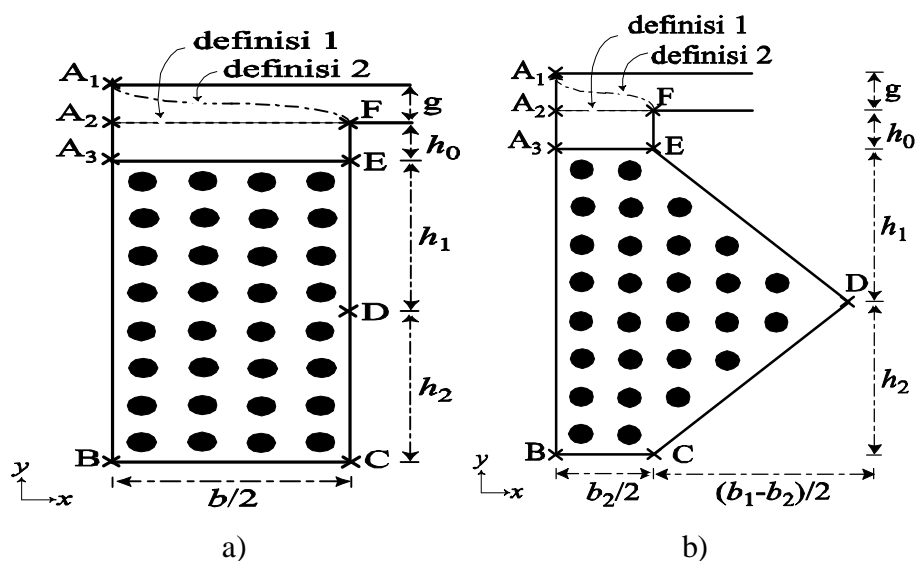
$$\frac{dz}{dw} = S(w-a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}(w-b)^{\frac{\beta}{\pi}-1}(w-c)^{\frac{\gamma}{\pi}-1}(w-d)^{\frac{\delta}{\pi}-1} \dots (1)$$

dengan S mewakili konstanta kompleks untuk skala serta rotasi; a, b, c, d dan seterusnya menyatakan titik-titik pada sumbu nyata bidang w yang berpadanan dengan titik-titik sudut poligon A, B, C, D dan seterusnya pada bidang z ; sedangkan $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ merupakan besar sudut-sudut internal pada titik-titik sudut poligon A, B, C, D, \dots (Binns, 1994; Driscoll, 2002).

Pada umumnya bentuk alur mesin elektrik bisa didekati dengan menggunakan bentuk poligon, sehingga pemetaan Schwarz-Christoffel dapat diterapkan untuk mengetahui distribusi medan magnet dalam alur.



Gambar 1 Pemetaan Schwarz-Christoffel dari bidang w ke bidang z menggunakan fungsi pemetaan f .



Gambar 2 Dua contoh bentuk alur serta dua definisi berbeda mengenai fluksi bocor alur (a: alur segiempat, b: alur segienam, \cdot posisi penghantar).

Penentuan Distribusi Medan Magnet dalam Suatu Alur

Pada Gambar 2 ditunjukkan dua contoh bentuk alur. Kedua bentuk tersebut berdimensi dua karena diasumsikan bahwa dalam arah sumbu z bentuknya seragam. Karena alur mempunyai bentuk simetris, dalam perhitungan hanya diperlukan separuh dari bentuk alur. Gambar 2a mewakili alur yang berbentuk segiempat, sedangkan gambar 2b mewakili alur segienam. Penghantar-penghantar berarus didistribusikan secara merata di dalam alur. Posisi tiap penghantar ditunjukkan dengan titik tebal hitam pada Gambar 2. Nilai parameter-parameter slot bisa dijumpai pada Apendiks.

Induktansi bocor alur biasa didefinisikan dengan menggunakan fluksi dalam alur yang tidak mengalir melintasi celah udara mesin (Jufer, 1995; Foggia, 1997). Pada Gambar 2, fluksi ditunjukkan dengan menggunakan batas terluar garis fluksi yang bertuliskan "definisi 1". Definisi lain disusun dengan menggunakan fluksi dalam alur yang meninggalkan *tooth slot* atau gigi alur serta tepat menyentuh permukaan dalam celah udara di sisi yang beseberangan dengan bukaan alur (Binns, 1994). Pada Gambar 2, garis fluksi terluar dengan menggunakan pemahaman ini ditandai dengan "definisi 2". Karena dengan menggunakan definisi 2 pengaruh celah udara bisa diperhitungkan, induktansi bocor dapat ditentukan dengan lebih akurat jika dibandingkan dengan menggunakan definisi 1.

Metode Konvensional

Penerapan metode konvensional didasarkan pada asumsi-asumsi berikut:

- medan magnet dalam slot mempunyai arah yang sejajar dengan sumbu- x serta hanya berubah sebagai fungsi koordinat y ,
- rapat arus dalam slot diasumsikan seragam,
- besi mempunyai permeabilitas tak terhingga.

Dengan asumsi-asumsi tersebut dis-

tribusi medan magnet dalam slot segiempat dapat dituliskan sebagai berikut:

$$H_z(y) = \frac{N I_{\text{kond}}}{b(h_2 + h_1)} y, \quad 0 \leq y \leq h_2 + h_1 \quad (1)$$

$$H_z(y) = \frac{N I_{\text{kond}}}{b}, \quad y \geq h_2 + h_1 \quad (2)$$

dengan I_{kond} mewakili arus tiap penghantar dalam alur. Dengan cara serupa distribusi medan dalam alur segienam dapat diperoleh.

Metode Pemetaan Schwarz-Christoffel

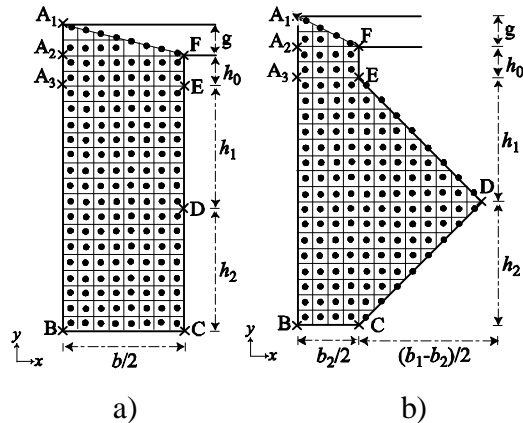
Penghitungan induktansi bocor alur dengan menggunakan metode pemetaan SC pada dasarnya mirip dengan jika menggunakan metode konvensional. Perbedaannya terletak pada penentuan distribusi medan magnet dalam alur serta celah udara yang lebih teliti jika menggunakan pemetaan SC. Sebagai hasilnya, asumsi a) yang telah disebutkan bisa dihilangkan, yang memberikan distribusi medan magnet dua dimensi $H_x = H_x(x, y)$ dan $H_y = H_y(x, y)$ dalam alur.

Langkah-langkah untuk menentukan distribusi medan magnet dengan menggunakan pemetaan SC adalah:

- Dalam bidang z , tentukan sudut-sudut poligonal yang mewakili alur serta besar sudut-sudut internalnya.
- Terapkan persamaan (1).
- Integrasikan persamaan (1) agar fungsi pemetaan $z = f(w)$ bisa diperoleh. Karena konfigurasi alur tidak trivial, persamaan ini harus diselesaikan secara numerik (Driscoll, 2002).
- Dapatkan hasil inversi $g = f^{-1}$ untuk memetakan dari bidang w kembali ke bidang z .
- Tentukan posisi konduktor-konduktor alur pada bidang z dan temukan posisi-posisi yang bersesuaian pada bidang w dengan menggunakan fungsi g .
- Medan magnet pada bidang w akhirnya bisa diperoleh. Karena konfigurasi yang dihasilkan menjadi trivial, medan magnet kompleks $H_w = H_u + jH_v$ bisa

ditentukan dengan menggunakan metode bayangan yang sudah dikenal luas.
 g) Dapatkan kuat medan magnet kompleks dalam bidang z , yaitu $H_z = H_x + jH_y$ dengan cara (Marković, 2004):

$$H_z = H_w \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^* = \frac{H_w}{\left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^*} \quad (3)$$



Gambar 3 Titik-titik penghitungan yang didistribusikan secara merata guna penghitungan energi magnetik yang terdapat dalam bagian-bagian alur (a: alur segiempat, b: alur segienam, titik-titik penghitungan).

Penghitungan Induktansi Bocor Alur

Setelah distribusi medan magnet dalam alur dan celah udara diperoleh, maka induktansi bocor slot bisa dihitung dengan menggunakan integrasi terhadap volume energi magnetik yang terdapat dalam daerah alur yang dibahas. Karena konfigurasi yang digunakan berdimensi dua, integrasi terhadap volume dapat disederhanakan menjadi integrasi terhadap permukaan. Karena pengintegrasian tidak bisa dilakukan dengan menggunakan persamaan matematis sederhana, perlu dilakukan pendekatan dengan menggunakan penjumlahan. Untuk mewujudkan pendekatan ini, bidang penampang alur dibagi-bagi menjadi luasan-luasan dasar DA , kemudian titik-titik penghitungan didistribusikan secara seragam, seperti ditunjukkan pada Gambar 3.

Agar pengaruh celah udara juga bisa diperhitungkan, garis fluksi terluar dari de-

finisi 2 (gambar 2) didekati dengan menggunakan garis lurus A_1F , sehingga menghasilkan daerah penghitungan dalam celah udara yang berbentuk segitiga A_1A_2F (Gambar 3).

Energi magnetik yang terdapat dalam setiap volume elementer diperoleh dengan menggunakan (Hasanah, 2004):

$$W_{\text{mag}} = \int \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV \approx \frac{1}{2} \mu_0 \sum (H^2) L \Delta A \quad (1)$$

dengan L menyatakan panjang alur dalam arah sumbu z .

Karena \mathbf{H} merupakan fungsi koordinat-koordinat x and y , nilai rata-ratanya dalam tiap volume elementer didekati dengan menggunakan H pada titik-titik penghitungan yang terdistribusi secara merata, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 3.

Selanjutnya integrasi terhadap seluruh volume alur yang terdiri atas:

- slot utama (daerah A_3BCDE , dengan $y \in [0, h_2 + h_1]$),
- bukaan slot (daerah A_2A_3EF , dengan $y \in [h_2 + h_1, h_2 + h_1 + h_0]$),
- celah udara (daerah A_1A_2F , dengan $y \in [h_2 + h_1 + h_0, h_2 + h_1 + h_0 + g]$),

akan menghasilkan energi total yang terdapat dalam alur.

Akhirnya induktansi bocor alur dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan berikut:

$$L_{\text{os}} = \frac{2W_{\text{mag}}}{I_{\text{kond}}^2} \quad (2)$$

METODE

Penelitian ini diawali dengan menghitung distribusi kuat medan dan energi magnetik dalam bagian-bagian alur serta induktansinya pada alur segiempat dan segienam dengan menggunakan metode konvensional, pemetaan Sc, dan elemen terbatas. Kemudian dilakukan pengujian pengaruh lebar celah udara pada energi magnetik yang terdapat dalam alur dan Pengaruh lebar celah udara terhadap

induktansi bocor alur segiempat dan segienam berbagai bagian alur segienam.

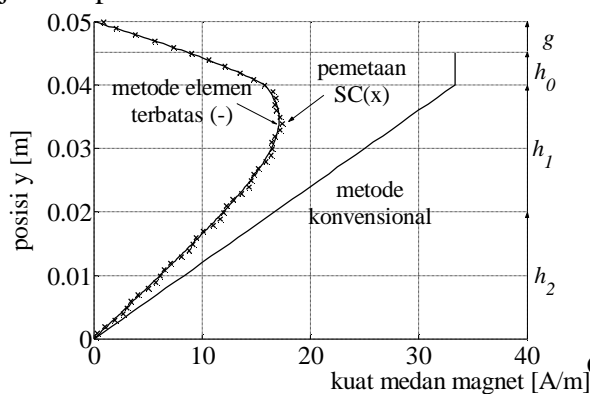
HASIL

Data yang diperoleh berdasarkan metode penelitian merupakan data perbandingan distribusi kuat medan pada alur segiempat dan segienam yang diperlihatkan pada Gambar 4 dan 5. Data hasil pengujian energi yang terdapat dalam berbagai bagian alur segienam diperlihatkan pada Tabel 1, sedangkan nilai induktansinya ditunjukkan pada Tabel 2. Sedangkan hasil pengujian pengaruh lebar celah udara pada energi magnetik yang terdapat dalam alur dan Pengaruh lebar celah udara terhadap induktansi bocor alur segiempat dan segienam berbagai bagian alur segienam diperlihatkan pada Gambar 6 dan 7.

PEMBAHASAN

Kuat Medan Magnet

Perbandingan distribusi kuat medan magnet sepanjang garis A_1B (Gambar 3) dalam alur segiempat yang diperoleh dengan menggunakan metode konvensional, pemetaan SC serta elemen terbatas ditunjukkan pada Gambar 4.

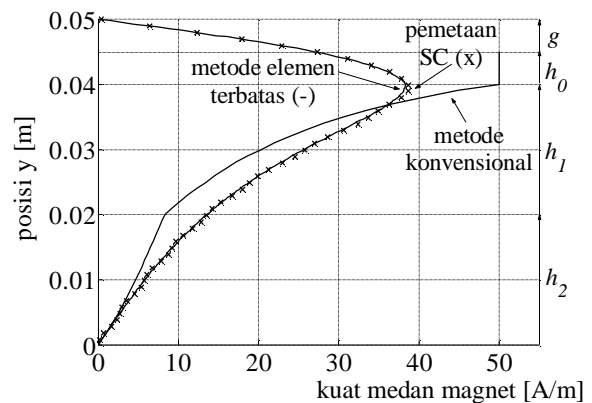


Gambar 4 Kuat medan magnet sepanjang garis A_1B dalam slot segiempat yang diperoleh dengan menggunakan tiga metode berbeda.

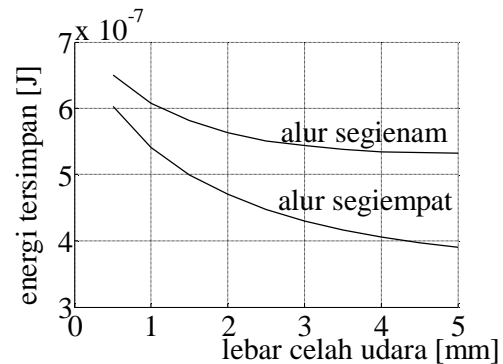
Perbandingan yang sama pada slot segienam ditunjukkan pada Gambar 5.

Dapat diamati bahwa metode SC dan elemen terbatas keduanya memberikan hasil yang sama, termasuk medan magnet da-

lam celah udara. Hal ini tidak terjadi jika menggunakan metode konvensional; penggunaan metode ini bahkan tidak memberikan hasil sama sekali untuk mengetahui medan dalam celah udara. Pada penggunaan metode SC, dapat diperhatikan pula bahwa kuat medan magnet sepanjang garis A_1B tidak berupa garis mulus melainkan berombak, yang disebabkan oleh penggunaan angka terbilang untuk banyaknya penghantar yang digunakan.



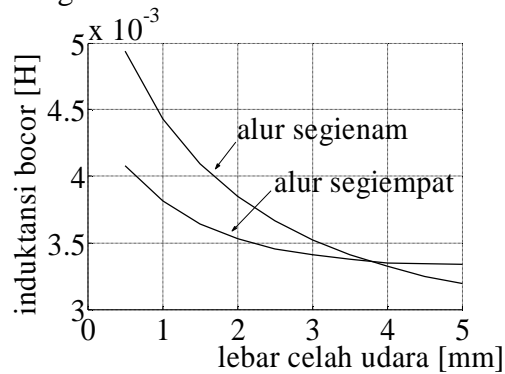
Gambar 5 Kuat medan magnet sepanjang garis A_1B dalam slot segienam yang diperoleh dengan menggunakan tiga metode berbeda.



Gambar 6 Pengaruh lebar celah udara pada energi magnetik yang terdapat dalam alur segiempat dan segienam.

Selanjutnya perlu juga digaribawahi bahwa asumsi kuat medan konstan dalam bukaan slot (daerah A_2A_3EF pada Gambar 2) dalam penerapan metode konvensional sama sekali tidak dapat dibenarkan. Hal ini menekankan pentingnya mengikutsertakan pengaruh celah udara dalam per-

hitungan.



Gambar 7 Pengaruh lebar celah udara terhadap induktansi bocor alur segiempat dan segienam

Energi magnetik dalam bagian-bagian alur serta induktansinya

Energi yang terdapat dalam berbagai bagian alur segienam diperlihatkan pada Tabel 1, sedangkan nilai induktansinya ditunjukkan pada Tabel 2.

Jika dibandingkan dengan hasil metode konvensional, hasil penghitungan in-

duktansi bocor alur menggunakan pemetaan SC lebih mendekati hasil penghitungan menggunakan metode berbasis elemen terbatas.

Perbandingan alur segiempat dan alur segienam

Pada penggunaan pemetaan SC, dari Gambar 6 diketahui bahwa untuk arus alur total serta luas penampang alur yang sama, alur segienam memuat energi lebih banyak dibandingkan dengan alur segiempat.

Namun begitu, sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 7, untuk suatu lebar celah udara tertentu dapat diperoleh induktansi yang sama pada kedua bentuk alur.

Gambar 6 dan 7 memperlihatkan pula bahwa makin lebar celah udara, makin kecil induktansi bocor alur karena medan magnet alur yang makin lemah menyebabkan energi magnetik yang bersesuaian juga makin sedikit.

Tabel 1 Energi Magnetik [J] yang Terdapat dalam Berbagai Bagian Alur Segienam

Bagian alur	Metode konvensional	Metode elemen terbatas	Pemetaan SC
Bagian utama alur	$3,519 \times 10^{-7}$	$3,102 \times 10^{-7}$	$3,116 \times 10^{-7}$
Bukaan alur	$0,786 \times 10^{-7}$	$1,871 \times 10^{-7}$	$1,841 \times 10^{-7}$
Celah udara	-	$0,450 \times 10^{-7}$	$0,456 \times 10^{-7}$
Seluruh alur tanpa celah udara	$4,304 \times 10^{-7}$	$4,973 \times 10^{-7}$	$4,956 \times 10^{-7}$
Seluruh alur dengan celah udara	-	$5,423 \times 10^{-7}$	$5,413 \times 10^{-7}$

Tabel 2. Induktansi [H] dalam Berbagai Bagian Alur Segienam

Bagian alur	Metode konvensional	Metode elemen terbatas	Pemetaan SC
Bagian utama alur	$2,207 \times 10^{-3}$	$1,946 \times 10^{-3}$	$1,954 \times 10^{-3}$
Bukaan alur	$0,493 \times 10^{-3}$	$1,173 \times 10^{-3}$	$1,154 \times 10^{-3}$
Celah udara	-	$0,282 \times 10^{-3}$	$0,286 \times 10^{-3}$
Seluruh alur tanpa celah udara	$2,699 \times 10^{-3}$	$3,119 \times 10^{-3}$	$3,109 \times 10^{-3}$
Seluruh alur dengan celah udara	-	$3,401 \times 10^{-3}$	$3,395 \times 10^{-3}$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil-hasil serta uraian

sebelumnya, bisa ditarik beberapa kesimpulan. Yang pertama, dengan menggunakan metode yang telah diusulkan, indukta-

nsi bocor alur dapat ditentukan dengan lebih teliti sehingga karakteristik kerja motor tak serempak dapat diperkirakan dengan lebih tepat. Yang kedua, metode pemetaan SC memberikan beberapa keuntungan, yaitu:

- 1) Memungkinkan distribusi medan magnet dua dimensi dalam alur dapat diperoleh,
- 2) Memungkinkan pengaruh celah udara dapat diamati, sehingga definisi yang lebih masuk akal mengenai fluksi maupun induktansi bocor bisa digunakan,
- 3) Tidak seperti metode konvensional yang hanya memberikan hasil yang tepat jika digunakan pada alur berbentuk segiempat (kecuali kalau digunakan faktor-faktor koreksi yang diperoleh secara empirik), bentuk umum alur yang diusulkan dalam makalah ini bisa diperluas ke setiap bentuk alur bersudut banyak sembarang.

APENDIKS

Nilai-nilai arus serta parameter alur yang digunakan dalam perhitungan:

$$L = 1000 \text{ mm}, \quad g = 5 \text{ mm}, \quad b = 40 \text{ mm}, \\ b_0 = 20 \text{ mm}, \quad b_1 = 60 \text{ mm}, \quad b_2 = 20 \text{ mm}, \\ h_0 = 5 \text{ mm}, \quad h_1 = 20 \text{ mm}, \quad h_2 = 20 \text{ mm}.$$

Untuk alur segiempat, digunakan:

$$I_{\text{kond}} = (1/64) \text{ A}, \quad N = 64 \text{ penghantar},$$

Untuk alur segienam, digunakan:

$$I_{\text{kond}} = (1/56) \text{ A}, \quad N = 56 \text{ penghantar}.$$

DAFTAR RUJUKAN

- Binns, K.J. *et al.* (1994). *The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Field*. New York: John Wiley & Sons Inc., hlm. 151.
- Driscoll, T.A. & Trefethen, L.N. (2002). *Schwarz-Christoffel mapping*, Cambridge:Cambridge University Press.
- Foggia, A. "Méthodes de Calcul des Inductances de Fuite", *Traité Génie Elec-trique*, hlm. D 3440-1 – D 3 440-20.

Hasanah, R-N. & Jufer, M. (2004). "Avoid-ing the Switching-off Failure in Capacitor Motors", *International Confe-rence on Electrical Machines (ICEM) 2004*. Cracow (Poland).

Jufer, M. (1995). *Electromécanique*. Lausanne: PPUR-EPFL.

Marković, M. (2004). *Magnetic Field Ana-lysis in Electric Motors Using Con-formal Mapping*, Disertasi EPFL Nomer 2923. Lausanne: PPUR.

Marković, M. *et al.* (2004). "Analyzing an Electromechanical Actuator by Schwarz-Christoffel Mapping", *IEEE Transactions on Magnetics*, Volume: 40, hlm. 1858-1863.